Ministerul Educaţiei şi Cercetării

**Olimpiada Naţională de Matematică**
Etapa finală
Iaşi, 17 Aprilie 2006

## CLASA A IX-A

**Subiectul 1.** Găsiţi valoarea maximă a expresiei

$$(x^3+1)(y^3+1),$$

pentru $x, y \in \mathbb{R}$ ce satisfac $x+y=1$.

**Subiectul 2.** Se consideră triunghiurile isoscele $ABC$ şi $DBC$ având baza $BC$ şi $\angle ABD = 90°$. Fie $M$ mijlocul segmentului $BC$. Punctele $E, F, P$ sunt alese astfel încât $E \in (AB), P \in (MC), C \in (AF)$ iar $\angle BDE = \angle ADP = \angle CDF$. Să se arate că $P$ este mijlocul segmentului $EF$ şi $DP \perp EF$.

**Subiectul 3.** Se consideră patrulaterul $ABCD$ înscris într-un cerc de rază $r$, pentru care există un punct $P$ pe latura $CD$ astfel încât $CB = BP = PA = AB$.

a) Să se arate că există puncte $A, B, C, D, P$ care îndeplinesc condiţiile de mai sus;

b) Să se arate că $PD = r$.

**Subiectul 4.** La o competiţie de tenis de masă desfăşurată pe parcursul a 4 zile au participat $2n$ elevi, $n \geq 5$. În fiecare zi fiecare elev a jucat câte un meci (fiind posibil ca aceeaşi pereche să se întâlnească în mai multe zile). Demonstraţi că această competiţie se poate termina cu un singur câştigător, cu trei elevi la egalitate pe locul al doilea şi fără să existe vreun jucător care să fi pierdut toate cele 4 partide. Câţi elevi au câştigat un singur meci şi câţi exact două meciuri, în aceste condiţii?

Timp de lucru: 3 ore
Fiecare subiect este notat cu 7 puncte.